Grass, Mann!

Das Clifford-Kinder-Rechenbuch

Martin Erik Horn

Manuskriptauszug: Inhaltsverzeichnis und Vorwort
Kapitel 1 und 2
Aufgabenstellungen 1 und 2
Lösungen der Aufgaben 1 und 2

Grass, Mann!

Das Clifford-Kinder-Rechenbuch

Martin Erik Horn
Schütte-Lanz-Str. 61
12209 Berlin

Email: mail@grassmann-algebra.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Was, Sie können multiplizieren? Noch vor wenigen Jahrhunderten, im Mittelalter, hätten Sie aufgrund solcher Kenntnisse zur wissenschaftlichen Elite gehört. Eine herausragende Position zu Hofe oder in der Finanzverwaltung der Kirche wäre Ihnen sicher gewesen. Und heute? Multiplizieren kann jedes Kind. Malnehmen ist eine Alltagstechnik geworden.

Nein, unsere Vorfahren waren nicht dümmer. Oder haben Sie schon einmal römische Zahlen multipliziert? Dieses Zahlensystem ist schlichtweg zu kompliziert. Erst als die indischen Ziffern und mit ihnen das Stellenwertsystem über Arabien und Spanien ins Abendland gelangten, wurden die Grundlagen für eine einfache Handhabung der Multiplikation gelegt. So konnte das Aufblühen der Mathematik in der Renaissance erfolgen – dank einer neuen mathematischen Technik.

Was, Sie können zwei Rotationen um unterschiedliche Drehachsen zusammenfassen? Heute wird Ihnen eine solche mathematische Operation erst nach Abschluss einer langwierigen akademischen Ausbildung gelingen. Sie werden danach (eventuell) die nicht einfache Handhabung von Rotationsmatrizen beherrschen. Doch wie wird die Welt in Hundert Jahren aussehen? Bereits Schüler werden lernen, beliebige Rotationen zu berechnen. Der Umgang mit Pauli-Matrizen (Noch nie gehört? Macht nichts! Selbst Physiker können mit diesem Begriff nach Abschluss ihres Studiums in der Regel kaum etwas anfangen.) wird zu einer Alltagstechnik geworden sein. Und ein Vorgeschmack auf diese neue, einfachere Mathematik, die ***Geometrische Algebra***, soll Ihnen dieses Buch vermitteln. Genießen Sie es! Sie lernen damit schon heute die Mathematik von morgen kennen. Viel Spaß also mit Kasper, Seppel und dem bösen Krokodil…

1. Kasper, Seppel und der chinesische Zauberer

Kasper: „Guten Morgen, liebe Kinderlein!“
Kinder: „Guten Morgen, Kasper!“
Kasper: „Oh, wer kommt denn da? Ist das nicht der Seppel?“
Kinder: „Ja, ja, der Seppel kommt!“
Kasper: „Guten Morgen, Seppel. Was machst Du denn hier? So früh um diese Uhrzeit?“
Seppel: „Äh, äh, ... na, ach ja. Ich gehe meinen neuen Freund besuchen, den chinesischen Zauberer.“
Kasper: „Den chinesischen Zauberer. Welchen Zauberer? Ich kenne keinen Zauberer?“
Seppel: „Was? Ist denn das die Möglichkeit? Du kennst den chinesischen Zauberer nicht? Aber da kommt er ja! Hallo Pau-Li!“
Pau-Li: „Guten Morgen, Seppel. Guten Morgen, Kasper. Jetzt hab’ ich’s aber eilig. Ich muss gleich zaubern.“
Kasper: „Da bin ich aber gespannt. Was wird der Zauberer Pau-Li denn zaubern?“
Pau-Li: „Ich zaubere die Richtungen. Alle möglichen Richtungen kann ich herzaubern. Willst du es mal sehen?“
Seppel: „Was für Richtungen? Wo gibt es hier denn Richtungen?“
Pau-Li: „Hier, Simsalabim, und schon hab’ ich eine Richtung!“
Pau-Li schwingt den Zauberstab und hält eine Pauli-Matrix hoch.
Pau-Li: „Schau Seppel, das hier ist meine allererste Richtung. Ich nenne sie die Vor-und-zurück-Richtung. Und damit die Erwachsenen mir auch glauben, dass ich nur vor und zurück gehe, habe ich mir ein ganz kompliziertes Symbol ausgedacht: Sigma-icks σ_x. Immer, wenn ich also Sigma-icks sage, meine ich also, dass man vor und zurück gehen kann. Gehe ich weit vor, habe ich viel Sigma-icks. Also zum Beispiel 20 Meter Sigma-icks bedeuten, dass ich 20 Meter nach vorne gehe. Und für die Erwachsenen schreibe ich dann, ... äh, Moment, Simsalabim...“
Eine Tafel erscheint. Darauf steht:

$$\mathbf{s = 20m}\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}$$

Kasper: „Aha, das Sigma-icks ist also ein Basisvektor im dreidimensionalen Raum."
Pau-Li: „Aber das klingt doch viel zu kompliziert! Basisvektor...! Das ist die Vor-und-zurück-Richtung."
Kasper: „Und wenn ich

$$\mathbf{s = -\,15m\ \sigma_x}$$

hätte, bedeutet dies, dass ich 15 Meter nach hinten, also zurück, gehe."
Pau-Li: „Genau!"
Seppel: „Und gibt es auch noch andere Richtungen? Immer nur vor und zurück, das ist doch auf die Dauer viel zu langweilig."
Pau-Li: „Oh, Simsalabim, sieh mal!"
Pau-Li schwingt wieder den Zauberstab und hält eine zweite Pauli-Matrix hoch.
Pau-Li: „Das ist jetzt meine Rechts-und-links-Richtung!"
Kasper staunt: „Na, so was. Da steht ja Sigma-ypsilon dran."
Pau-Li: „Ja, das Sigma-ypsilon ist die Rechts-und-links-Richtung. Wenn ich also gaaaaaanz viel Sigma-ypsilon habe, gehe ich gaaaaaanz weit nach reeeeeechts...."
Kasper: „Vorsicht, vorsicht, Pau-Li. Gleich fällst du runter vom Kasperltheater."
Pau-Li: „Jaja, das ist dann der Pauli-Effekt. Äh, wo waren wir stehen geblieben?"
Seppel: „Aber ich würde doch so gerne schräg gehen. So ein bisschen nach vorne, vielleicht einen halben Meter und dafür zwei Meter nach links. Da, wo man dann nicht runterfällt."
Kasper: „Schräg gehen ist doch ganz einfach. Das ist dann, äh, simsalabim, äh (laut), SIM-SA-LA-BIM..."
Nichts tut sich.
Kasper: „Ach, alles muss man selber machen."
Er wischt die Tafel ab und schreibt:

$$\mathbf{s = 0{,}5m\ \sigma_x - 2m\ \sigma_y}$$

Seppel: „Und nach oben geht es auch?"
Pau-Li: „Selbstverständlich. Schließlich kann ich alle Richtungen zaubern. Auch die Oben-und-unten-Richtung. Hier, Simsalabim, ist sie."
Pau-Li schwingt den Zauberstab und ratzfatz erscheint die dritte Pauli-Matrix.

Kasper (neidisch): „Das würde ich auch gerne können."
Seppel (liest langsam vor): „s –i –g – m – a – a – – z – e – t – t. Das heißt ja Sigma-zett σ_z."
Kasper: „Der Basisvektor für die Oben-und-unten-Richtung heißt also σ_z. Das ist ja interessant. Habe ich also zum Beispiel den Vektor..."
Pau-Li: „Vektor, Vektor! Immer diese Fachsimpelei. Das ist einfach die Strecke, die du gehst."
Kasper: „... den Vektor, äh, die Strecke von..."

$$\mathbf{a = 2m\,\sigma_x - 6m\,\sigma_y + 3m\,\sigma_z}$$

Seppel: „Also zwei Meter nach vorne, sechs Meter nach links und drei Meter nach oben. Was, so weit hoch willst du springen?"
Kasper: „Ach lasst mich doch endlich mal rechnen."
Denn der Kasper, der rechnet für sein Leben gerne. Und er wird ganz hippelig, wenn man ihn dauernd unterbricht. Also rechnet er:
„Wie weit bin ich denn dann gekommen? Man nimmt also...

$$|a| = \sqrt{a\ a}$$

Und dann setze ich ein und multipliziere...

$$
\begin{aligned}
|a| &= \sqrt{(2m\,\sigma_x - 6m\,\sigma_y + 3m\,\sigma_z)(2m\,\sigma_x - 6m\,\sigma_y + 3m\,\sigma_z)} \\
&= \sqrt{4m^2\sigma_x\sigma_x - 12m^2\sigma_x\sigma_y + 6m^2\sigma_x\sigma_z - \ldots} \\
&\qquad \overline{\ldots - 12m^2\sigma_y\sigma_x + 36m^2\sigma_y\sigma_y - 18m^2\sigma_y\sigma_z - \ldots} \\
&\qquad\qquad \overline{\ldots + 6m^2\sigma_z\sigma_x - 18m^2\sigma_z\sigma_y + 9m^2\sigma_z\sigma_z}
\end{aligned}
$$

Oh, das ist aber kompliziert."
Pau-Li: „Nein, nein. Das wird ganz einfach. Denn für jede einzelne Richtung gilt für sich..."

$$\boldsymbol{\sigma_x\,\sigma_x = 1 \qquad \sigma_y\,\sigma_y = 1 \qquad \sigma_z\,\sigma_z = 1}$$

Kasper: „Ach, das sind ja Einheitsvektoren!"
Seppel: „Aber was ist denn mit dem Richtungen, die ganz durcheinander sind, sigma-icks-sigma-ypsilon zum Beispiel?"
Pau-Li: „Das wird noch einfacher. Denn dann gilt..."

$$\boldsymbol{\sigma_x\,\sigma_y = -\,\sigma_y\,\sigma_x \qquad \sigma_y\,\sigma_z = -\,\sigma_z\,\sigma_y \qquad \sigma_z\,\sigma_x = -\,\sigma_x\,\sigma_z}$$

Kasper: „Das ist ja toll. Dann heben sich die Mischungen ja alle weg ..."

Seppel: „Welche Mischungen?“
Kasper: „Na beispielsweise die 6 Quadratmeter Sigma-icks-sigma-zett. Das sind gemischte Richtungen. Und weiter unten haben wir ja 6 Quadratmeter Sigma-zett-sigma-icks.“
Seppel: „Aber 6 m^2 plus 6 m^2 ergibt doch 12 m^2. Da hebt sich doch nix weg!“
Kasper: „Vorsicht, vorsicht. Beim zweiten Term laufen die Richtungen in einer anderen Reihenfolge. Ich muss Sigma-zett-sigma-icks doch erst rumdrehn, damit ich es mit Sigam-icks-sigma-zett zusammenrechnen kann. Und dann werden die zweiten 6 m^2 negativ.“

$$\mathbf{6\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_z + 6\ m^2\ \sigma_z\ \sigma_x\ =\ 6\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_z - 6\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_z}$$

Pau-Li: „... und übrig bleiben nur die echten Quadrate. Dazu habe ich die Pauli-Matrizen doch hergezaubert. Das sind – immer diese Mathematikersprache! – unsere räumlichen Basisvektoren. So einfach ist das.“
Kasper: „Wirklich toll! Dann kann ich ja weiterrechnen.“
Und Kasper rechnet:

$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{4m^2 + 36m^2 + 9m^2} \\ &= \sqrt{49m^2} \\ &= 7\ m \end{aligned}$$

„Whow, das sind ja sieben Meter!“
Seppel: „So weit willst du springen? Das glaube ich nicht, dass du das kannst.“
Pau-Li: „Moment, das haben wir gleich ... Simsalabim...“
Ein kleiner Ruck von Pau-Li mit seinem Zauberstab und rumms klebt Kasper an der Zimmerdecke, auf den Millimeter genau zwei Meter vorne, sechs Meter links und drei Meter hoch.

Das also sind die drei Richtungen des Raumes, und nachdem uns Pau-Li alles verraten hat, können wir die auch selber herzaubern. Wir brauchen nur die drei Pauli-Matrizen. Und die gibt es heutzutage doch fast schon an jeder Ecke zu kaufen.

Kaspers Aufgabe eins

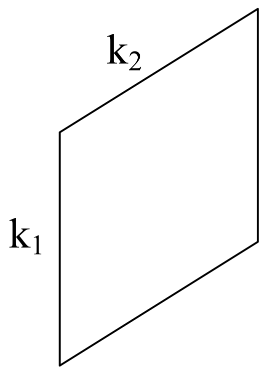
Seppel hat sich einen großen Gleitdrachen gekauft und lange, lange geübt. Endlich plumpst er beim Start nicht mehr auf die Nase, sondern segelt ganz oben vom Berg hinab ins Tal. Hui, ist das luftig hier oben! Und was für eine Aussicht auf die kleine Welt dort unten. Vor lauter Begeisterung passt Seppel nicht auf und wird von einer Windbö erwischt. Sein Drachen schießt mit sechs Metern pro Sekunde nach links, mit sechs Metern pro Sekunde nach vorne und mit einem halben Meter pro Sekunde nach unten.
Wie sieht der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ aus?
Und wie groß ist der Betrag der Gesamtgeschwindigkeit $|\mathbf{v}|$ von Seppel?

2. Kasper und Seppel bei der Großmama

Kasper: „Hallo Seppel!”
Seppel: „Hallo Kasper, ach ist das schwer!”
Kasper: „Ja aber Seppel, was schleppst du denn mit dir rum?“
Seppel (stöhnt): „So schwer ist dieser Tisch, ach, so schwer!“
Kasper: „Ein Tisch soll das sein? Aber Seppel, das ist doch kein Tisch!“
Seppel: „Doch, Kasper, den habe ich selbst gebaut. Drei Tage habe ich daran gearbeitet. Denn der ist für Großmutter.“
Kasper: „Ja, das böse Krokodil hat den Tisch von Großmama umgeschmissen. Da ist er kaputt gegangen. Großmutter braucht dringend einen neuen Tisch.“
Seppel: „Und deshalb habe ich ihr diesen Tisch gebaut. Drei Tage lang.“
Kasper: „Aber das ist doch kein Tisch. Wie sieht er denn aus?“
Seppel (verlegen): „Na ja, vielleicht ist er ein bisschen krumm geworden. Aber ansonsten ist es ein sehr guter Tisch. Schau mal, vier Beine hat er auch.“
Kasper: „Ja, die Beine sehe ich. Aber die Tischplatte...“
Kasper schüttelt den Kopf.
Kasper: „So eine Tischplatte ist keine Tischplatte.“
Seppel: „Ach weißt du, Kasper. Als ich die Platte gesägt habe, da habe ich an die vielen Richtungen vom Zauberer Pau-Li gedacht. Und da bin ich ganz durcheinander gekommen. Aber die Seitenkante ist mir gut gelungen.“
Kasper (nachdenklich): „Hmm, hmm, ja, das stimmt. Die Seitenkante, die stimmt noch.“
Seppel: „Ja, ich habe ganz genau nachgedacht. Diese Tischkante verläuft ganz genau in der Vor-und-zurück-Richtung. Und sie ist ganz genau einen Meter dreißig lang.“
Kasper: „Also von dir aus gesehen geht die Kante nach vorne. Das sind dann doch eins Komma drei Meter Sigma-icks, null Meter Sigma-ypsilon und wieder null Meter Sigma-zett. Warte, ich schreib das mal auf.“
Und Kasper schreibt:

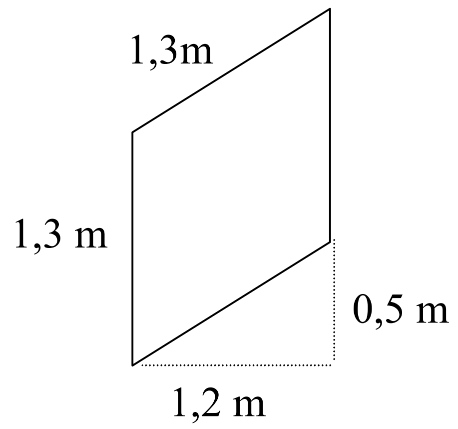
$$\mathbf{k_1 = 1{,}3\ m\ \sigma_x}$$

Seppel: „Aha. k ist also die Abkürzung für Kante. Und da wir mehrere Kanten haben, hängen wir eine eins dran, weil das eben die erste Kante ist."
Kasper: „Genau!"
Seppel: „Und die andere Kante nennen wir dann k_2?"
Kasper: „Richtig, das ist k_2. Aber die geht überhaupt nicht genau in die Rechts-und-links-Richtung, Seppel!"
Seppel: „Ja, beim Nachdenken habe ich ein bisschen zu viel nachgedacht und ein bisschen zu wenig aufgepasst. Jetzt ist sie schräg. Aber sie sieht doch auch sehr schön aus, Kasper."
Kasper (skeptisch): „Naja. Was wird Großmutter wohl dazu sagen?"
Seppel: „Oh, ich habe mich ganz genau an Großmutter gehalten. Sie wollte alle Tischseiten ganz genau einen Meter dreißig lang haben. Und ich habe ganz vorsichtig 1,3 m herausgesägt."
Kasper: „Aber nicht in die Rechts-und-links-Richtung!"
Seppel: „Nein? Aber warum denn nicht?"
Kasper: „Weil sie schräg geht. Sie geht auch ein bisschen in die Vor-und-zurück-Richtung. Warte, ich zeichne es dir auf."
Und Kasper beginnt ganz vorsichtig zu zeichnen.



Seppel: „Ja, so sieht der Tisch von oben gesehen aus. Und k_2 geht nicht genau in die Vor-und-zurück-Richtung?"
Kasper: „Oh nein, oh nein, denn die Rechts-und-links-Richtung steht doch senkrecht zur Vor-und-zurück-Richtung. Und deine Tischkanten haben nun einfach keinen 90°-Grad-Winkel zueinander!"
Seppel: „Oh weh. Aber in welche Richtung geht denn dann diese Kante?
Kasper: „Warte, ich messe das mal ab."
Kasper zieht einen langen, langen Zollstock aus seiner Tasche, beugt sich über den Tisch und murmelt: „Hmm, eins Komma vier vier, ähh,

eins Komma drei null null, aha, null Komma fünf null null, ähem, eins Komma zwei null, hmm, zwei Komma eins sechs, ohoh, und noch mal eins Komma drei null. Hmm Seppel, dein Tisch hat folgende Längen..."



Seppel strahlt: „Ja, ja, überall ganz genau 1,3 m! Aber was ist jetzt die k_2-Richtung?"
Kasper: „Ganz einfach: Einen Meter zwanzig in die Rechts-und-links-Richtung und einen halben Meter in die Vor-und-zurück-Richtung. Damit können wir schreiben..."
Und Kasper schreibt:

$$\mathbf{k_2 = 0{,}5\ m\ \sigma_x + 1{,}2\ m\ \sigma_y}$$

Seppl: "Gell, Kasper, das macht doch nichts? Der Tisch ist trotzdem schön, oder?"
Kasper: „Ja, langsam gefällt er mir auch. Aber ich glaube, was anderes stimmt nicht mit dem Tisch."
Seppel (entsetzt): „Was anderes? Ja was denn anderes?"
Kasper: „Ich glaube, der Tisch ist zu klein."
Seppel: „Zu klein? Du meinst zu niedrig?"
Kasper: „Aber nein, nicht zu niedrig. Die Tischfläche ist zu klein, denke ich."
Seppel: „Waaaas? Wie groß, äh..., wie klein ist sie denn?"
Kasper: „Na das kann man doch ausrechnen."
Seppel: „Die Tischfläche ausrechnen? Wie geht denn das?"
Kasper: „Also, hm, hm, ich glaube, dazu muss man die Seitenlängen mutil... multu... multiplizieren."
Seppel: „Multi-was?"
Kasper: „Mul-ti-pli-zie-ren, miteinander malnehmen also."

Seppel: „Aha, malnehmen. Das kann ich doch auch!“
Er denkt kurz nach und schreibt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k_1\,k_2} &= \mathbf{1{,}3\ m\ \sigma_x\ (0{,}5\ m\ \sigma_x + 1{,}2\ m\ \sigma_y)} \\
&= \mathbf{0{,}65\ m^2\ \underbrace{\sigma_x\,\sigma_x}_{1} + 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\,\sigma_y} \\
&= \mathbf{0{,}65\ m^2 + 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\,\sigma_y}
\end{aligned}$$

Nachdenklich betrachtet Seppel sein Ergebnis, kratzt sich und meint: „Das ist aber komisch, Kasper.”
Kasper: „Hm, wirklich eigenartig. Deine Rechnung hat ja zwei Ergebnisse: 0,65 m^2 und 1,56 m^2 Sigma-icks-sigma-ypsilon.“
Seppel: „Meinst du, ich hab’ was falsch gemacht?“
Kasper: „Lass’ uns mal nachdenken. Da kommen also zwei Ergebnisse raus. Wirklich sehr, sehr seltsam!“
Seppel: „Ja, in der Schule, da hatten wir immer nur ein Ergebnis beim Malnehmen. Und jetzt sind es auf einmal zwei...“
Kasper: „Und zusammenzählen darf man sie auch nicht. 2,21 m^2 wäre doch viel zu groß.“
Seppel: „Au weia, dann müsste die eine Seite doch 1,8 m lang sein.“
Kasper: „Das ist sie aber nicht. Ich hab’s doch ganz genau nachgemessen.“
Er beugt sich noch einmal über den Tisch und überprüft sein Ergebnis mit dem Zollstock: „Das sind nie und nimmer 1,8 m!“
Seppel: „Du, Kasper, vielleicht hilft es, wenn ich andersrum rechne?“
Kasper: „Andersrum? Wie andersrum?“
Seppel: „Na, ich kann doch auch $k_2\,k_1$ mutti... multi... multizieren, na, malnehmen.“
Kasper: „Aber was soll denn das ändern?“
Seppel: „Na schau mal, das heißt doch...“

$$\begin{aligned}
\mathbf{k_2\,k_1} &= \mathbf{(0{,}5\ m\ \sigma_x + 1{,}2\ m\ \sigma_y)\ 1{,}3\ m\ \sigma_x} \\
&= \mathbf{0{,}65\ m^2\ \sigma_x\,\sigma_x + 1{,}56\ m^2\ \sigma_y\,\sigma_x}
\end{aligned}$$

Kasper: „Und jetzt?“
Seppel: „Pau-Li hat uns das doch mit den Richtungen erklärt. Und $\sigma_y\,\sigma_x$ ist gleich minus $\sigma_x\,\sigma_y$. Das ergibt dann...“

$$k_2 k_1 = 0{,}65\ m^2 \underbrace{\sigma_x \sigma_x}_{1} + 1{,}56\ m^2 \underbrace{\sigma_y \sigma_x}_{-\sigma_x \sigma_y}$$

$$= 0{,}65\ m^2 - 1{,}56\ m^2\ \sigma_x \sigma_y$$

Kasper: „Aber Seppel, hier sind ja wieder zwei Ergebnisse."
Seppel: „Au weia, auch beim Rumdrehn ändert sich nichts."
Kasper: „Doch ... Sieh, mal! Das erste Ergebnis ist das gleiche, aber das zweite, das ist anders. Da steht jetzt ein Minuszeichen davor."
Seppel: „Ohhh, was hat das alles zu bedeuten?"
Kasper: „Das weiß ich auch nicht!"
Seppel: „Und wie groß ist denn jetzt die Tischfläche?"
Kasper: „Wenn doch nur der Pau-Li da wäre! Der könnte uns sicher helfen."
Seppel: „Ja, der könnte das Ergebnis ganz einfach herzaubern! Sollen wir ihn rufen?"
Kasper: „Meinst du, wir schaffen das?"
Seppel: „Aber ja doch, wenn uns alle Kinder helfen!"
Kasper (dreht sich zum Publikum): „Sollen wir den Pau-Li rufen?"
Kinder: „Ja, ja!"
Kasper: „Also, ich zähle bis drei, und dann rufen wir alle ganz feste und ganz laut. Eins ... zwei ... drei..."
Kinder: „Pau-Liiii, Pau-Liiii."
Kasper: „Ob das reicht? Los, wir versuchen das noch mal doppelt so laut!"
Kasper, Seppel und die Kinder: „PAU-LIIII, PAU-LIIII."
Er raschelt in der Kulisse: „Brrr, was ist denn das für ein Lärm?"
Pau-Li taucht auf: „Hat mich hier jemand gerufen? Wo ich doch gerade meinen Mittagsschlaf gemacht habe."
Kasper: „Hallo Pau-Li. Da bist du ja. Wir brauchen deine Hilfe."
Pau-Li: „Meine Hilfe?"
Kasper: „Ja, wir kommen mit deinen Richtungen nicht weiter und können nicht mal die Tischfläche berechnen."
Pau-Li (sieht sich Seppels Rechnungen an): „Aha, multipliziert habt ihr ja schon..."
Kasper: „Und dabei haben wir vier Ergebnisse erhalten."
Seppel: „Ja, 0,65 m^2 ohne Sigma-icks und 1,56 m^2 Sigma-icks-sigma-ypsilon beim ersten Versuch."

Kasper: „Und beim zweiten Versuch kam auch 0,56 m^2 ohne Sigma-icks raus, aber ein Minus 1,56 m^2 Sigma-icks-sigma-ypsilon."
Pau-Li: „Und jetzt wollt ihr die Fläche wissen?"
Kasper: „Ja, die Tischfläche."
Seppel: „Gell, die ist 0,65 m^2 groß?"
Pau-Li: „Aber Seppel. Das ist doch keine Fläche. Eine Fläche muss immer Richtungen haben, in der man um die Fläche rumgehen kann!"
Seppel: „Und um die 0,65 m^2 kann ich nicht rumgehen?"
Kasper: „Nein, da sind ja keine Richtungen mehr. Man weiß also gar nicht, wie man gehen soll."
Pau-Li: „Und deshalb ist das keine Fläche."
Kasper: „Aha, jetzt verstehe ich. Wenn ich erst der Kante k_1 entlang gehe und dann der Kante k_2 entlang, gehe ich in Sigma-icks-sigma-ypsilon Richtung um den Tisch herum."
Seppel: „Das ist also das erste Ergebnis von 1,56 m^2 mit dem Pluszeichen."
Pau-Li: „Richtig, entgegen der Uhrzeigerrichtung zählen Umdrehungen positiv."
Kasper: „Ja, und wenn ich erst k_2 und dann k_1 entlang gehe, ist es genau umgekehrt."
Seppel: „Dann haben wir ein Minuszeichen vor dem Ergebnis. Weil du dann genau andersrum um den Tisch läufst!"
Kasper: „Ja, in Sigma-ypsilon-sigma-icks-Richtung."
Pau-Li: „Aber deshalb habe ich doch die Richtungen genauso gezaubert. Beim Umdrehen der Richtungen ändert sich automatisch das Vorzeichen. Ihr erinnert euch noch?"
Und simsalabim erscheint

$$\boldsymbol{\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x}$$

an der Tafel.
Seppel: „Also zählt es in Uhrzeigerrichtung immer negativ."
Pau-Li: „Ja sicher."
Kasper: „Gut, aber wie berechnet man die Tischfläche denn richtig?"
Pau-Li: „Ganz einfach, man nimmt das Tischprodukt."
Seppel: „Das Tischprodukt? Wie geht denn das?"
Pau-Li: „Oh, das ist nur ein Trick. Weil doch ein Ergebnis ohne Richtungen gar nicht zur Fläche gehört, muss man es verschwinden lassen."
Kasper (mürrisch): „Verschwinden lassen. Das kannst doch nur du mit

simsalabim und der Zauberei. Wir können das doch nicht.“
Pau-Li: „Aber hallo... Nun mal nicht so pessimistisch, Kasper. Das hat mit Zauberei nichts zu tun. Schaut mal, simsala...“
Kasper : „Hab’ ich’s doch gewusst!“
Pau-Li: „...salabim. Ähja, ein bisschen zaubern muss ich ja!”
Und schwups erscheint folgende Formel:

$$\mathbf{A = k_1 \wedge k_2}$$

Kasper und Seppel gucken erstaunt: „Das sollen wir berechnen?“
Pau-Li (lacht): „Das ist jetzt unser Tischprodukt!“
Seppel, Kasper (verdutzt): „Tischprodukt???“
Pau-Li: „Ja, wir berechnen schließlich die Tischfläche damit. Und weil wir was malnehmen, ist es ein Produkt.“
Kasper (zweifelnd): „Soso...“
Pau-Li: „Und damit alles, was keine Fläche ist, wegfällt, ziehen wir einfach Seppels beide Rechnungen voneinander ab. Das ist das Tischprodukt.“
Pau-Li schwingt seinen Zauberstab und – simsalabim – erscheint auf der Tafel:

$$\mathbf{k_1 \wedge k_2 = \frac{1}{2}(k_1\, k_2 - k_2\, k_1)}$$

Seppel: „Tatsächlich! Die 0,65 m^2 ohne Sigma-icks von der ersten Rechnung heben sich gerade mit den 0,65 m^2 der zweiten Rechnung weg, weil die davon abgezogen werden. 0,65 m^2 – 0,65 m^2 ist ja Null.“
Kasper: „Und das Einhalb vor der Klammer kommt daher, dass die Fläche sonst doppelt gerechnet würde.“
Seppel: „Ja, denn zieht man was Negatives ab, wird’s ja eigentlich dazugezählt. Und die 1,56 m^2 Sigam-icks-sigma-ypsilon sind ja negativ.“
Kasper: „Oh, im Kopf ist mir das zu viel, ich schreib’ es am besten mal auf.“
Und so ergänzt Kasper:

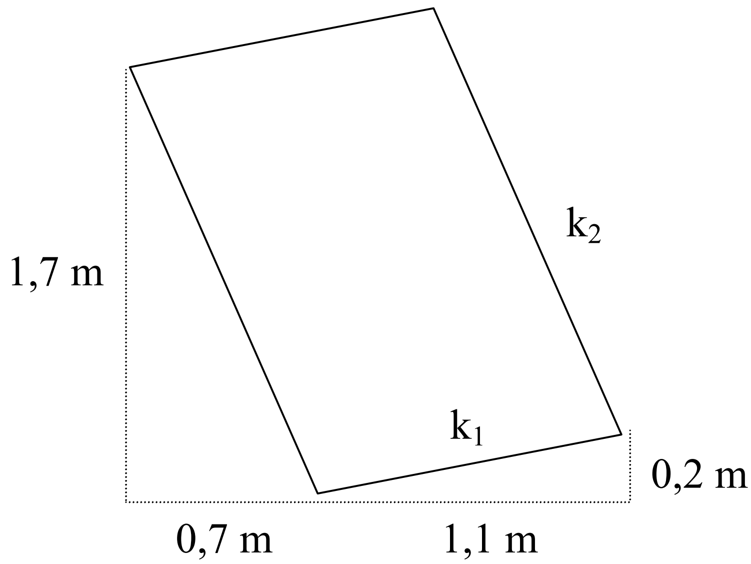
$$\mathbf{A = k_1 \wedge k_2 = \frac{1}{2}(k_1\, k_2 - k_2\, k_1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{0{,}65\ m^2 + 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_y - (0{,}65\ m^2 - 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_y)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{0{,}65\ m^2 + 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_y - 0{,}65\ m^2 + 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_y}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\mathbf{2 \cdot 1{,}56\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_y}\right]$$
$$= \mathbf{1{,}56\ m^2\ \sigma_x\ \sigma_y}$$

Seppel: „Der Tisch ist also 1,56 Quadratmeter groß?“
Pau-Li: „Ja, denn die Sigma-icks-sigma-ypsilon-Richtungen zeigen uns, dass dies eine Fläche ist.“
Seppel: „Hhmm, Kasper, meinst du, dass dieser Tisch dann für Großmutter groß genug ist?“
Kasper: „Ja, Seppel. Sie hat ja nicht so große Teller. Die haben da sicher alle Platz drauf.“
Seppel: „Dann bin ich ja beruhigt – Doch ach, ich muss diesen schweren Tisch ja noch zu Großmutters Haus schleppen.“
Kasper (versucht, Seppel zu helfen): „Ohh ja, der ist tatsächlich schwer!“
Pau-Li: „Halt, einen Moment, das haben wir gleich.“
Ein kurzer Ruck von Pau-Li mit dem Zauberstab und, simsalabim, schon steht der Tisch mitten in Großmutters Wohnzimmer. Noch dazu mit einer schönen Tischdecke drauf.
Seppel (erfreut): „Vielen Dank, Pau-Li, was hätten wir nur ohne dich gemacht?“
Kasper: „Ja, und ohne deine vielen Richtungen!“

Kaspers Aufgabe zwei

Jetzt hat das böse Krokodil auch noch Großmutters Spiegel kaputt gemacht. Seppel braucht fünf Tage, um einen neuen zu bauen. Als er fertig ist, sieht der Spiegel so aus:



Wie heißen die Kantenvektoren des Spiegels?
Und wie groß ist die Glasfläche in der Mitte?

Das böse Krokodil berechnet den Flächeninhalt folgendermaßen:

$$|k_1| = \sqrt{(1{,}1\,\mathrm{m})^2 + (0{,}2\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{1{,}25\,\mathrm{m}^2} = 1{,}118\,\mathrm{m}$$

$$|k_2| = \sqrt{(1{,}7\,\mathrm{m})^2 + (0{,}7\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{3{,}38\,\mathrm{m}^2} = 1{,}838\,\mathrm{m}$$

$$|A| = |k_1| \cdot |k_2| = 1{,}118\,\mathrm{m} \cdot 1{,}838\,\mathrm{m} = 2{,}05\,\mathrm{m}^2$$

Was ist an dieser Rechnung falsch?

Um sicher zu gehen, dass das böse Krokodil nicht doch recht hat, berechnet Kasper den Inhalt der Glasfläche mit Hilfe einer weiteren Methode. Wie könnte diese Rechnung aussehen?

Lösungen

Aufgabe 1: $\mathbf{v = 6\ m/s\ \sigma_x - 6\ m/s\ \sigma_y - 0{,}5\ m/s\ \sigma_z}$

$\mathbf{|v| = 8{,}5\ m/s}$

Aufgabe 2: $\mathbf{k_1 = 1{,}1\ m\ \sigma_y + 0{,}2\ m\ \sigma_z}$

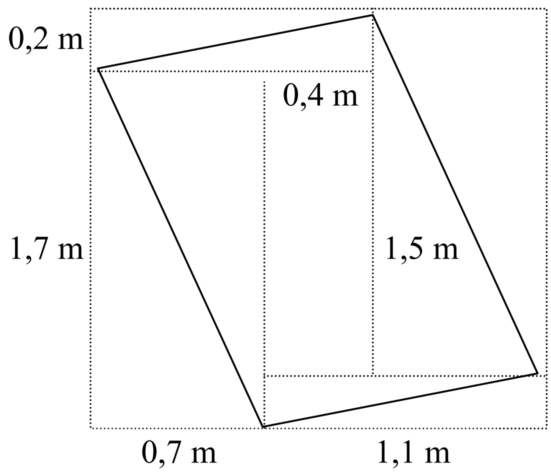
$\mathbf{k_2 = -\ 0{,}7\ m\ \sigma_y + 1{,}7\ m\ \sigma_z}$

$$\mathbf{A = \frac{1}{2}\left[2 \cdot (1{,}87\ m^2\ \sigma_y\ \sigma_z - 0{,}14\ m^2\ \sigma_z\ \sigma_y)\right]}$$

$$\mathbf{= 2{,}01\ m^2\ \sigma_y\ \sigma_z}$$

Die Lösung des bösen Krokodils ist falsch, weil die Seitenkanten des Spiegels nicht senkrecht aufeinander stehen. Die verwendete Formel gilt nur für Rechtecke.

Es gibt zahlreiche weitere Methoden, den Flächeninhalt auszurechnen. Beispielsweise kann die Höhe des Parallelogramms verwendet werden. Aber dazu benötigt man die Winkel, und das macht die Sache kompliziert. Einfacher ist es, die Fläche zu einem Rechteck zu ergänzen und folgendermaßen zu unterteilen:



Dann ergibt sich der Inhalt der Spiegelfläche zu:

$$\mathbf{|A| = 1{,}8\ m \cdot 1{,}9\ m - 0{,}7\ m \cdot 1{,}7\ m - 1{,}1\ m \cdot 0{,}2\ m = 2{,}01\ m^2}$$

Oder:

$$\mathbf{|A| = 1{,}7\ m \cdot 0{,}7\ m + 1{,}1\ m \cdot 0{,}2\ m + 1{,}5\ m \cdot 0{,}4\ m = 2{,}01\ m^2}$$